

УДК 517.9+534.111

Сліпчук А. М., Деньщиков О. Ю.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПОВЗДОВЖНЬОЇ ШВИДКОСТІ НА НЕЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ РУХОМИХ ОДНОВИМІРНИХ СИСТЕМ

Динамічні процеси, що відбуваються в одновимірних лінійно-пружних системах з незмінними геометричними і фізико-механічними характеристиками, вивчені достатньою мірою у разі, якщо така система не рухається уздовж своєї геометричної осі. Однак багато практичних задач (підвісні канатні дороги, конвеєрні лінії, пристрої для витяжки і намотування дроту та ін.) потребують для їх розв'язку уточнених підходів – дослідження впливу руху на динаміку процесу. Динамічні процеси у рухомих пружних одновимірних системах описати математично значно важче. Це пов'язано з проблемами інтегрування диференціальних рівнянь, що описують їх рух. Крім того, у більшості випадків при розгляді вказаного типу задач не враховуються пружні властивості середовища, що призводять до видовження канату. Нижче розглядається більш складна задача, яка поєднує вказані фактори: середовище рухається уздовж своєї осі з постійною швидкістю і враховується його лінійне подовження та періодичні збурюючі сили.

Теоретичні дослідження, що проводились у попередніх роботах [1–3], стосуються нелінійно-пружних систем у яких фізико-механічні та кінематичні параметри сталі. Динамічні процеси у таких коливних системах описуються диференціальними рівняннями із постійними коефіцієнтами. Однак багато практичних задач (пристрої для витяжки і намотування дроту, які мають змінну лінійну швидкість) вимагають при їх дослідженні уточнених підходів вивчення впливу руху середовища на динаміку процесу. Нижче розглядається задача, які поєднують такі фактори: середовище рухається уздовж своєї осі зі швидкістю, яка змінна у часі, також враховуються його пружні характеристики та вплив гармонійної сили на дріт у ролика 3 та 4 (рис. 1).

Отже, основною метою розв'язку даної проблеми є встановлення закону зміни амплітуди нелінійних поперечних коливань системи, які рухаються зі змінною швидкістю вздовж своєї осі. Необхідно отримати залежності параметрів коливання не тільки від фізико-механічних та геометричних величин, але і від впливу змінної швидкості руху. Маючи закон зміни швидкості поперечного руху системи (нитки, струни), ми можемо знайти амплітуду коливання в кожний момент часу.

Дослідження впливу кінематичних та фізико-механічних параметрів на поперечні коливання дроту, що рухається вздовж своєї осі, проведено на перемотувальному верстаті. Дріт для перемотування виготовлений із кольорових та дорогоцінних матеріалів (срібла, золота, латуні, міді тощо). Такий перемотувальний верстат використовується для перемотування дроту діаметром – від 0,25 мм до 2 мм. Кінематична схема такого верстата зображена на рис. 1.

Обладнання складається з двигуна 10 РД 09, який приводить в рух ведучий вал. На ньому безпосередньо розміщений ведучий барабан (1) (рис. 1), на котрий намотується дріт (2). Між ведучим та веденим барабанами є повзунок. Повзунок призначений для рівномірного вкладання дроту на барабан (1). Інший двигун приводить черв'як в обертальний рух, повзунок за допомогою черв'ячної передачі здійснює лінійне переміщення. На повзунку розміщений ролик (3), через який перекинута дріт. Ролик (3) рухається вздовж барабана (1) у реверсному режимі, між двома обмежувачами. Додатковий ролик (4), який закріплений на коромислі, виконує роль компенсатора натягу. Такий компенсаторний ролик (4) потрібний для гасіння зовнішніх збурень, які виникають під час роботи перемотувального верстату. На штативі закріплено ведений барабан (5), з якого змотується дріт. Барабан закріплений між двома тримачами. Один тримач підпружинений для зручного встановлення та знімання веденого барабану з дротом.

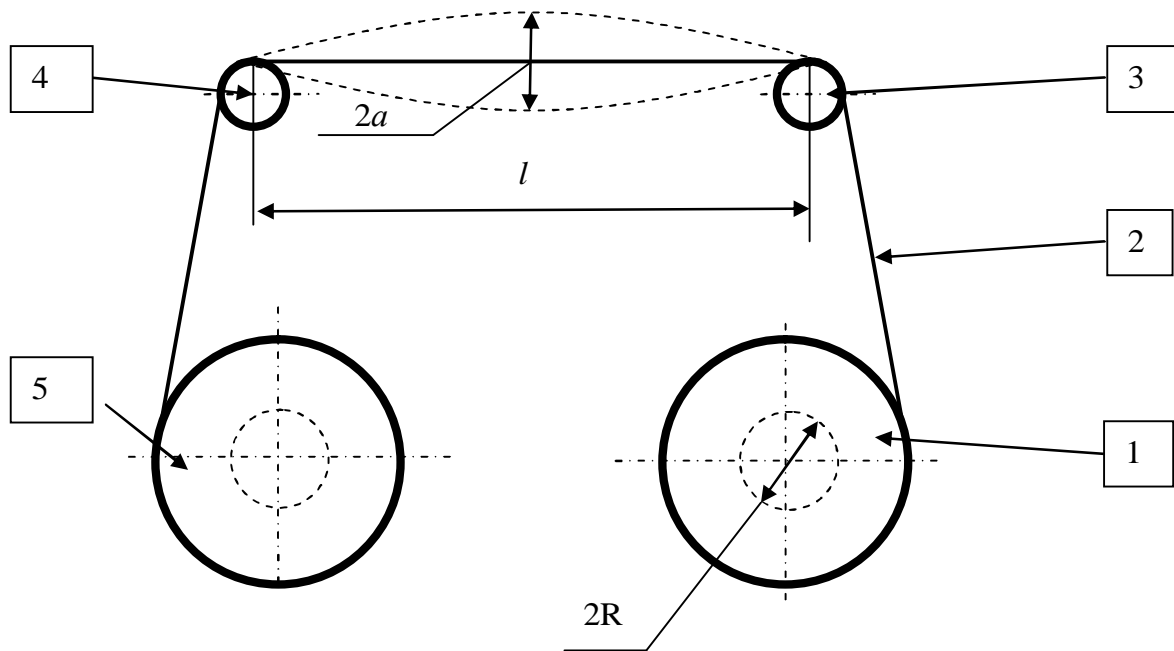


Рис. 1. Кінематична схема перемотувального верстата:

1 – ведучий барабан; 2 – дріт; 3 – направляючий ролик; 4 – компенсаційний ролик; 5 – ведений барабан

Розглянута нелінійна коливна система (рис. 1), яка характеризується повільно змінними у часі параметрами: момент інерції котушки, натяг дроту та його повздовжня швидкість. Диференціальне рівняння з повільно змінними коефіцієнтами, що описує динамічні процеси у нелінійно-пружному середовищі матиме вигляд [4–6]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e f_1(t, u, u_x, u_{xx}, q), \quad (1)$$

де $a^2(t) = \frac{T(t)}{r} - V^2(t)$, а $V(t)$ і $T(t)$ – повільно змінна у часі повздовжня швидкість дроту та сила натягу відповідно.

Наближений розв’язок рівняння (1) можна отримати за допомогою асимптотичних методів. У досліджуваній нелінійній коливній системі деякі параметри будуть повільно змінними у часі, зокрема $t = \epsilon t$. Змінною величиною буде власна частота коливання дроту, яка залежатиме від часу. Загальний розв’язок (1) представляється у вигляді:

$$u(x, t) = a(t, t) X(x) \cos y + \epsilon u_1(t, a, q, y, x), \quad (2)$$

в якому, $u_1(t, a, q, y, x)$ є періодичною функцією кута ψ з періодом 2π , а величини a та ψ , як функції часу, визначаються у першому наближенні у нерезонансному випадку, рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon A_1(t, a) + \dots, \\ \frac{dy}{dt} &= w(t) + \epsilon B_1(t, a) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Задача побудови асимптотичних наближених розв'язків (1) полягає у знаходженні функцій $A_1(t, a)$ і $B_1(t, a)$, та $u_1(t, a, q, y, x)$ і наступним інтегруванням системи рівняння (3). Можна знайти вираз для $A_1(t, a)$ і $B_1(t, a)$ у загальному випадку:

$$\begin{aligned} A_1(t, a) &= -\frac{a}{2w(t)} \frac{dw(t)}{dt} - \frac{1}{2pmw(t)} \int_0^{2p} \int_0^{2p} f(t, a, y) \sin y \, dy \, dq; \\ B_1(t, a) &= -\frac{1}{2pmw(t)a} \int_0^{2p} \int_0^{2p} f(t, a, y) \cos y \, dy \, dq. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким чином, для першого асимптотичного наближення, розв'язок (1) слід шукати у формі:

$$u(x, t) = a(t, t) X(x) \cos(\psi), \quad (5)$$

де a та ψ визначаються з рівняння (3) і після математичних перетворень матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ea}{2w(t)} \frac{dw(t)}{dt} - \frac{1}{2pmw(t)} \int_0^{2p} f(t, a, y) \sin y \, dy; \\ \frac{d\psi}{dt} &= w(t) - \frac{1}{2pmw(t)a} \int_0^{2p} f(t, a, y) \cos y \, dy. \end{aligned} \quad (6)$$

У першому наближенні повільно змінна частота коливання та сила натягу будуть викликати «додаткові» сили, причому знак залежатиме від того, як будуть змінюватись параметри досліджуваної системи, а також як вони спотворюють гармонічне коливання.

При побудові асимптотичного наближеного розв'язку, слід звести інтегрування одного диференціального рівняння другого порядку (1) до інтегрування двох рівнянь першого порядку (6). В більшості випадків неможливо зінтегрувати систему диференціальних рівнянь (6) елементарними функціями, а тому для дослідження динамічного процесу доводиться використовувати чисельні методи, зокрема метод Рунне-Кута 4-го порядку.

Кутова швидкість приводу є сталою. Момент інерції котушки натяг дроту та радіус намотування — величини, які змінюються у часі, тому поперечні коливання дроту необхідно розглядати, як нелінійні коливання системи з повільно змінними коефіцієнтами.

Запишемо диференціальне рівняння руху:

– дроту:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T(t)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{EF}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (7)$$

– барабана:

$$\frac{d}{dt} (J(t) w_{val}) = T(t) R(t) - M_t, \quad (8)$$

де $t = \epsilon t$ – повільно змінний час; M_t – момент тертя між веденим барабаном і віссю; $J(t)$ – момент інерції веденого барабана; $T(t)$ – натяг дроту, який змінюється у часі.

Із рівняння (8) можна знайти натяг дроту $T(t)$, попередньо використавши наступне:

$$\frac{d}{dt}(J(t)w) = \frac{dJ(t)}{dt}w + J(t)\frac{dw}{dt}. \quad (9)$$

Оскільки другий доданок у рівнянні (9) дорівнює нулю (кутова швидкість є сталою), то воно прийме вигляд:

$$\frac{d}{dt}(J(t)w) = r w_{val}R \left(\frac{3}{2}(kVt)^2 + 2RkVt + \frac{R^2}{2} \right) = T(t)R(t) - M_t. \quad (10)$$

Рівняння (10) дає можливість знайти силу натягу дроту:

$$T(t) = \frac{r w_{val}^2 R \left(\frac{3}{2}(kVt)^2 + 2RkVt + \frac{R^2}{2} \right) + M_t}{R + kVt} = \frac{r w_{val}^2 R \left(\frac{3}{2}(kVt)^2 + 2RkVt + \frac{R^2}{2} \right) + F_{tr}}{R + kVt}. \quad (11)$$

Якщо використати отриману залежність сили натягу дроту (11), то диференціальне рівняння для знаходження АФХ у випадку нелінійного технічного закону пружності приймає вигляд:

$$\frac{da}{dt} = \frac{e a}{4} \frac{\left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{3}{2}(kVt)^2 + 2RkVt \right) + \frac{F_{tr}}{r} - V^2}{t^2 \left(3k^2V^2t + 2RkV - \frac{kV \left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{3}{2}(kVt)^2 + 2RkVt \right)}{(R + kVt)} \right)}; \quad (12)$$

$$\frac{dy}{dt} = w(t) - e \left(\frac{p^2}{l^2} \frac{V^2}{2w(t)} + \frac{3 T(t)p^4}{8 r l^4} \frac{a^2}{w(t)} \right)$$

У випадку дії на дріт гармонічної сили, з частотою близької до частоти власних поперечних його коливань (резонансний випадок) диференціальне рівняння (12) набуває вигляду:

$$\frac{da}{dt} = \frac{e a}{4} \frac{\left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{3}{2}(kVt)^2 + 2RkVt \right) + \frac{F_{tr}}{r} - V^2}{t^2 \left(3k^2V^2t + 2RkV - \frac{kV \left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{3}{2}(kVt)^2 + 2RkVt \right)}{(R + kVt)} \right)} - \frac{eH}{(w(t) + n(t))} \cos y; \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = w(t) - n - e \left(\frac{p^2}{l^2} \frac{V^2}{2w(t)} + \frac{3 T(t)p^4}{8 m l^4} \frac{a^2}{w(t)} \right) + \frac{eH}{a(w(t) + n(t))} \sin y.$$

Якщо врахувати коливання компенсуючого ролика за гармонійним законом, то АФХ у резонансному випадку визначається диференціальними рівняннями:

$$\frac{da}{dt} = \frac{ea}{4} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{3}{2}(kVt)^2 + 2RkVt \right) + \frac{F_{tr}}{r} - V^2}{t^2} \right) - \frac{eH}{(w(t)+n(t))} \cos y; \tag{14}$$

$$\frac{dy}{dt} = w(t) - n(t) - e \left(\frac{p^2 V^2}{2w(t)l^2} + \frac{3a^2 E F p^4}{4 r w(t)l^4} + \frac{R_2}{2pl^2 r w(t)} \right) + \frac{eH}{a(w(t)+n(t))} \sin y.$$

Із рівняння (11) побудовано графік залежності сили натягу від повздовжньої швидкості дроту і від часу (рис. 2). Використовуючи (11) частоту коливання дроту дорівнює:

$$w(t) = \frac{p}{l} \sqrt{\frac{T(t)}{r} - V^2} = \frac{p}{l} \sqrt{\frac{w_{val} R \left(\frac{3}{2}(kVt)^2 + 2RkVt + \frac{R^2}{2} \right) + \frac{F_{tr}}{r} - V^2}{R + kVt}}. \tag{15}$$

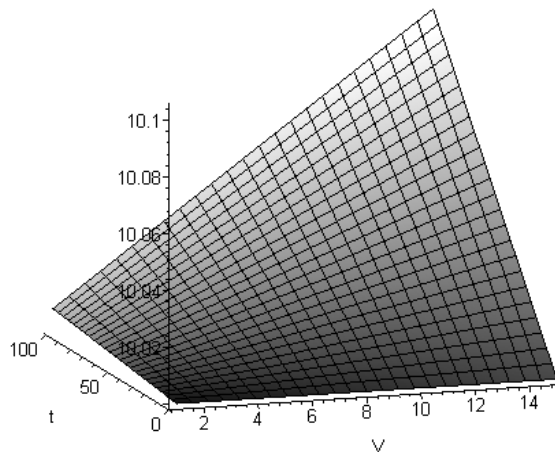


Рис. 2. Залежність сили натягу дроту від його повздовжньої швидкості та часу

Як видно з формули (15), дріт буде коливатись, якщо підкореневий вираз невід’ємний. Крім цього, існує така критична швидкість, за якої проходить зрив коливань.

Аналіз залежності (15) показує, що радіус веденого барабана не суттєво впливає на частоту поперечних коливань дроту, чого не скажеш про лінійну швидкість перемотування дроту: при її зростанні частота поперечних коливань спадає (див. рис. 3): а) при зростанні повздовжньої швидкості видно, що амплітуда зростає майже за лінійним законом; б) якщо $V = 5$ м/с, то зростання амплітуди коливання становить 5 % порівняно з дротом, що не характеризується повздовжнім рухом (вільні коливання нерухомого дроту).

На основі (14) можна побудувати графіки зміни амплітуди у резонансному режимі для різних повздовжніх швидкостей дроту при силі тертя 10Н. Зокрема, при швидкості 3,2 м/с амплітуду коливання зростає на 8,5 % порівняно з коливаннями дроту, що рухається вздовж своєї осі із швидкістю 1,26 м/с.

Крім цього, зростання сили тертя приводить до зменшення амплітуди коливання. Якщо порівнювати характер зміни амплітуди, то можна побачити, що незначна зміна сили тертя (з $F_{tr} = 10$ Н до $F_{tr} = 15$ Н) між ведучим барабаном і віссю, на якій він обертається, не приводить до суттєвих відмінностей амплітуди коливання.

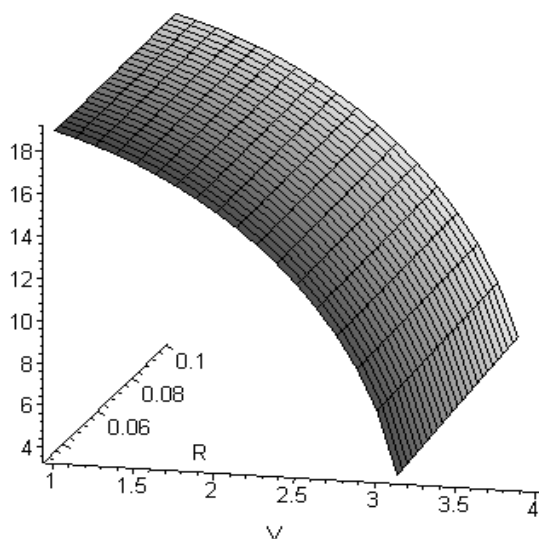


Рис. 3. Залежність частоти поперечних коливань дроту від радіуса веденого барабана та його лінійної швидкості

При перемотуванні, у випадку коли компенсуючий ролик здійснює гармонійне коливання (амплітуда таких переміщень рівна 2 мм) з частотою рівною частоті власних поперечних коливань руху дроту – має місце резонансне явище.

Аналіз теоретичних результатів показує: а) при швидкості дроту 3,2 м/с амплітуда його коливання рівна 0,0115 м (при однорідних крайових умовах); б) при такій же повздовжній швидкості амплітуда коливання рівна 0,0108 м (при неоднорідних крайових умовах), тобто на 6,7 % менше.

ВИСНОВКИ

В результаті проведених досліджень виконано аналіз впливу різноманітних факторів на динамічні процеси, що відбуваються у сталевих канатах. Встановлено:

1. Радіус веденого барабана не суттєво впливає на частоту поперечних коливань дроту.
2. При зростанні лінійної швидкості перемотування частота поперечних коливань спадає, а амплітуда зростає майже за лінійним законом.
3. Зміна величини зовнішнього збурення, при однакових швидкостях перемотування, призводить до незначної зміни амплітуди коливання (величина амплітуди зовнішнього збурення зростає у 2,5 рази, в той же час амплітуда коливання дроту зростає на 4 %).

ЛІТЕРАТУРА

1. Боженко М. В. Вплив повздовжнього руху на нелінійні поперечні коливання пружних одновимірних систем / М. В. Боженко, А. М. Сліпчук // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – Львів : НУЛП, 2005. – № 509. – С. 25–30.
2. Сліпчук А. М. Нелінійні поперечні коливання пружного рухомого каната і методи їх дослідження / А. М. Сліпчук // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів : НУЛП, 2003. – № 28. – С. 89–94.
3. Сліпчук А. М. Нелінійні поперечні коливання пружного рухомого каната при збурюючих крайових умовах / А. М. Сліпчук // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – Львів : НУЛП, 2008. – № 613. – С. 155–163.
4. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Наука, 1974. – 503 с.
5. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков. – К. : Вища школа, 1976. – 592 с.
6. Гацук П. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем / П. Гацук, Л. Зорій. – Львів : Українські технології, 1999. – 372 с.